Title	Pluriharmonic maps in affine differential geometry and (1,1)-geodesic affine immersions (Geometry of homogeneous spaces and submanifolds)
Author(s)	黒須, 早苗
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1346: 138-154
Issue Date	2003-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/25073
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 138-154

Pluriharmonic maps in affine differential geometry and $(1,1)$-geodesic affine immersions

東京理科大学大学院理学研究科 D4　黒須早苗 (Sanae Kurosu)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Tokyo University of Science

1 Introduction

ケーラー多様体からリーマン多様体への写像はそのヘシアンの複素化の $(1,1)$-part がゼロであるとき多重調和と呼ばれる．多重調和写像については [10] 等で様々な研究が行なわれている．ケーラー多様体からリーマン多様体への等長はめ込みに対し，複素化された第２基本形式の $(1,1)$-part がゼロであるときに，はめ込みは $(1,1)$-geodesic あるいは多重調和と呼ばれ，associated family と呼ばれる写像の１径数族の存在とはめ込みの $(1,1)$-geodesic 性についての結果が得られている．また，[5] の論文ではケーラー多様体からリーマン対称空間への写像に対し同様の議論が展開され，はめ込みに対して得られているのと類似の結果が得られている．また，ケーラー多様体からユークリッド空間への等長はめ込みに対し，与えられたはめ込みを実部として実現するような正則等長はめ込みの構成が $(1,1)$-geodesic 等長はめ込みとその associated family を用いて [2] で行われている．外の多様体が擬ユークリッド空間のときには同様の結果が [6] で得られている．

本稿ではこれらのアファイン微分幾何学版を考える．§２では複素アファイン接続を持つ複素多様体から実多様体への多重調和写像について調べ，associated family を構成し，associated family の存在と写像の多重調和性の関係についての結果を得た．§３では複素アファイン接続を持つ複素多様体から実多様体への $(1,1)$-geodesic アファインはめ込みに対し，§２で写像に対して行ったのと同様の考察を行った．§４ではアファインはめ込みの積はめ込みについて，アファイン基本形式，シェイプテンソル，横断接続などの特徴付けを行った．§５では本稿の主結果である複素多様体からアファイン空間へのアファインはめ込みに対しその積はめ込みが複素アファインはめ込みになるような複素構造の構成を外の積多様体に対して行った．最後にこれらの性質を満たす例をあげ，具体的に associated family の構成をし，与えられたアファインはめ込みが実部になるような複素アファインはめ込みをアファインはめ込みの積はめ込みとして構成した．

2 多重調和写像

本稿では全ての多様体，写像は滑らかとし，更に多様体は連結とする．M を多様体，E を M 上のベクトル束とする．$\Gamma(E)$ を E の切断全体の集合とし，$\mathcal{C}(E)$ を

E 上の接続全体の集合とする．多様体 M, $\widetilde{M}$ の間の写像 $f : M \to \widetilde{M}$ に対し，$f^\sharp T\widetilde{M}$ を引き戻し束，$f_\sharp : f^\sharp T\widetilde{M} \to T\widetilde{M}$ をその束写像，$i^f : TM \to f^\sharp T\widetilde{M}$ を各点 $x \in M$ で $i^f_x := (f_{\sharp x})^{-1} f_{*x}$ により定義される準同型写像とする．$\mathcal{C}_0(TM)$ を M 上捩率ゼロのアファイン接続全体の集合とし，$\nabla \in \mathcal{C}_0(TM)$, $\widetilde{\nabla} \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M})$ とする．写像 $f : M \to \widetilde{M}$ のヘシアン H_f を $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し，

$$H_f(X,Y) := f^\sharp\widetilde{\nabla}_X i^f Y - i^f \nabla_X Y$$

で定義する．ここで $f^\sharp\widetilde{\nabla}$ は $\widetilde{\nabla}$ の f による引き戻しを表す．∇, $\widetilde{\nabla}$ が共に捩率ゼロなので H_f は X, Y に対し対称である．

複素多様体を $2m$ 次元実多様体 M とその複素構造 $J : TM \to TM$ を用いて (M, J) で表すことにする．複素多様体 (M, J) に対し，

$$\mathcal{C}_0(TM, J) := \{\nabla \in \mathcal{C}_0(TM) \mid \nabla_X J = 0 \text{ for } \forall X \in \Gamma(TM)\}$$

と置く．$\mathcal{C}_0(TM, J)$ の元は**複素アファイン接続**と呼ばれる．以下 § 2 では (M, J) は複素多様体とし，$\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$ とする．

定義 2.1 写像 $f : M \to \widetilde{M}$ はそのヘシアン H_f が各点 $x \in M$ で任意の $X, Y \in T_xM$ に対し $H_f(JX, Y) = H_f(X, JY)$ を満たすとき**多重調和**といわれる．

ケーラー多様体からの多重調和写像については様々な研究が行われている．例えば [5] を参照．複素多様体間の任意の正則あるいは反正則写像は多重調和写像である．写像 $f : M \to \widetilde{M}$ が多重調和であるという性質は M 上の複素アファイン接続 $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$ の取り方に依らないことが示せる．一方，$\widetilde{M}$ 上のアファイン接続 $\widetilde{\nabla} \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M})$ の取り方には次のように依存する．2つのアファイン接続 $\widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}' \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M})$ に対し差テンソル K を

$$K_U V := \widetilde{\nabla}_U V - \widetilde{\nabla}'_U V \qquad U, V \in \Gamma(TM)$$

で定義する．いま $\widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}'$ は共に捩率ゼロなので K は U, V に関して対称である．$f^\sharp K$ を K の f による引き戻しとする．写像 $f : M \to \widetilde{M}$ が $\widetilde{\nabla} \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M})$ に対して多重調和であるとき，$\widetilde{\nabla}' \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M})$ に対しても多重調和であることと $f^\sharp K$ が各点 $x \in M$ で任意の $X, Y \in T_xM$ に対して

$$f^\sharp K_X JY = f^\sharp K_{JX} Y$$

を満たすこととは同値である．

次に associated family について考える．$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し，M 上の $(1,1)$ テンソル場 E^z を

$$E^z := \mathrm{Re}(z) id_{TM} + \mathrm{Im}(z) J$$

で定義する．ここで$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$はおのおのzの実部，虚部である．$\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$に対し，各点$x \in M$で任意の$X \in T_xM$に対し$E^z$は次のような性質を持つ．

$$E^z E^{z^{-1}} = id_{TM},$$
$$\nabla_X E^z = 0.$$

定義 2.2 写像$f : M \to \widetilde{M}$のassociated family $f_z : M \to \widetilde{M}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$とは，あるベクトル束同型$\Psi_z : f^\sharp T\widetilde{M} \to f_z^\sharp T\widetilde{M}$に対し，$f_1 = f$と，各点$x \in M$で任意の$X \in T_xM$に対して

$$f_z^\sharp \widetilde{\nabla}_X \Psi_z = \Psi_z f^\sharp \widetilde{\nabla}_X, \tag{2.1}$$
$$i^{f_z} = \Psi_z i^f E^z \tag{2.2}$$

を満たす写像fの複素1径数族である．

ケーラー多様体からリーマン対称空間への写像に対し，[5]で

$$E^\theta := \cos\theta id_{TM} + \sin\theta J \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

で定義される(1,1)テンソル場を用いてassociated familyと呼ばれる写像の1径数族f_θが構成されている．そこでは(2.1)の条件ではなく$f^\sharp\widetilde{\nabla}$の曲率テンソルが$\Psi_z$で不変である，という条件を付けてassociated familyを定義している．

写像$f : M \to \widetilde{M}$にassociated familyが存在するとき，associated familyの定義よりfとf_zのヘシアンH_f，H_{f_z}の間には各点$x \in M$で任意の$X, Y \in T_xM$に対して

$$H_{f_z}(X, Y) = \Psi_z H_f(X, E^z Y) \tag{2.4}$$

の関係があることがわかる．associated familyの存在と写像の多重調和性について次の結果を得た．

補題 2.3 写像$f : M \to \widetilde{M}$に*associated family*が存在すればfは多重調和である．

証明 (2.4)よりfとf_zのヘシアンの間には各点$x \in M$で任意の$X, Y \in T_xM$に対して

$$H_{f_z}(X, Y) = \mathrm{Re}(z)\Psi_{zx} H_f(X, Y) + \mathrm{Im}(z)\Psi_{zx} H_f(X, JY)$$

の関係がある．H_{f_z}の対称性と$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$の任意性から，$f$が多重調和であることがわかる．　□

次のような場合には補題2.3の逆が成立することを示すことができた．以下，$(\mathbb{R}^{2m+p}, D)$を$2m + p$次元アファイン空間と標準アファイン接続とする．

命題 2.4 複素多様体 (M, J) が単連結のとき，写像 $f : M \to \mathbb{R}^{2m+p}$ に *associated family* が存在することと f が多重調和であることとは同値である．

証明 $(e_1, \ldots, e_{2m+p})$ を $\mathbb{R}^{2m+p}$ の標準基底とし，$\bar{e}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 2m+p$, を e_α から決まる大域的接ベクトル場，$(\theta^1, \ldots, \theta^{2m+p})$ を $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{2m+p})$ の双対基とする．1 形式 $\omega_\alpha := f^*\theta^\alpha \circ E^z$ は任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して

$$f_*(E^z X) = \sum_\alpha (f^*\theta^\alpha)(E^z X)\bar{e}_\alpha \tag{2.5}$$

を満たす．1 形式 ω_α, $\alpha = 1, \ldots, 2m+p$, が閉であるということと

$$\sum_\alpha d\omega_\alpha(f^\sharp \bar{e}_\alpha) = 0$$

とは同値である．ここで $f^\sharp \bar{e}_\alpha \in \Gamma(f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p})$ は各点 $x \in M$ に対し $(f^\sharp \bar{e}_\alpha)_x := (f_{\sharp x})^{-1}(\bar{e}_\alpha)_{f(x)}$ で定義される切断 $\bar{e}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 2m+p$, の引き戻しである．一方，任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対して

$$\begin{aligned} 2\sum_\alpha (d\omega_\alpha)(X, Y)(f^\sharp \bar{e}_\alpha) &= f^\sharp D_X i^f E^z Y - f^\sharp D_Y i^f E^z X - i^f E^z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= H_f(X, E^z Y) - H_f(Y, E^z X) \end{aligned}$$

が成り立つので $(d\omega_\alpha)(X, Y) = 0$ が成り立つことと

$$H_f(X, E^z Y) = H_f(Y, E^z X) \tag{2.6}$$

が成り立つこととが同値であることがわかる．写像 f が多重調和であるとすると (2.6) は成立する．このとき $d\omega_\alpha = 0$ と M が単連結であることよりポアンカレの補題から M 上の関数 φ^α, $\alpha = 1, \ldots, 2m+p$ で

$$d\varphi^\alpha = f^*\theta^\alpha \circ E^z$$

を満たすものが存在する．$f_z(x) := \varphi^\alpha(x)e_\alpha$ とおき，$\Psi_z : f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p} \to f_z^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$ を各点 $x \in M$ で $\Psi_{z_x}(f^\sharp \bar{e}_\alpha)_x := (f_z^\sharp \bar{e}_\alpha)_x$ によって定義すると機械的な計算により f_z は f の associated family になることが示される． □

ケーラー多様体からリーマン対称空間への多重調和写像に対し，命題 2.4 と同様の結果が [5] において既に得られている．

3 (1, 1)-geodesic アファインはめ込み

ここでは $f : M \to \widetilde{M}$ を多様体 M, $\widetilde{M}$ の間のはめ込みとする．$f^\sharp T\widetilde{M}$ の部分束 N が

$$f^\sharp T\widetilde{M} = i^f(TM) \oplus N \tag{3.1}$$

を満たすときはめ込み f の**横断束**であるという．分解 (3.1) に対し，$\pi_f : f^\sharp T\widetilde{M} \to i^f(TM)$，$\pi_N : f^\sharp T\widetilde{M} \to N$ を射影準同型，$\iota_f : i^f(TM) \to f^\sharp T\widetilde{M}$，$\iota_N : N \to f^\sharp T\widetilde{M}$ を包含写像とする．また $\hat{i}^f := \pi_f i^f : TM \to i^f(TM)$ と置くとこれは TM から $i^f(TM)$ へのベクトル束同型となる．横断束が N のはめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ に対し $f^\sharp\widetilde{\nabla}$ から TM 上に決まる接続 $(\hat{i}^f)^{-1}\pi_f(f^\sharp\widetilde{\nabla})\iota_f\hat{i}^f$ が M 上に与えられている接続 ∇ と等しいとき，このはめ込みを横断束が N の**アファインはめ込み**といい，これを $(f,N) : (M,\nabla) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ と書く．横断束 N が明記されているときには $f : (M,\nabla) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ と略記する．横断束が N のアファインはめ込み $f : (M,\nabla) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ に対し，アファイン基本形式 B，シェイプテンソル A，横断接続 ∇^N をそれぞれ各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対して

$$B_X := \pi_N(f^\sharp\widetilde{\nabla})_X\iota_f\hat{i}^f, \quad A_X := -(\hat{i}^f)^{-1}\pi_f(f^\sharp\widetilde{\nabla})_X\iota_N, \quad \nabla^N_X := \pi_N(f^\sharp\widetilde{\nabla})_X\iota_N$$

で定義する．B_XY，$A_X\xi$ は通常 $\alpha(X,Y)$，$A_\xi X$，$S_\xi X$ 等と書かれている．ここで $\xi \in \Gamma(N)$ である．このとき，ガウス，ワインガルテンの恒等式は各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$，$Y \in \Gamma(TM)$，$\xi \in \Gamma(N)$ に対し次のように書かれる．

$$(f^\sharp\widetilde{\nabla})_X i^f Y = i^f\nabla_X Y + B_X Y, \qquad \text{(ガウス)}$$
$$(f^\sharp\widetilde{\nabla})_X\xi = -i^f A_X\xi + \nabla^N_X\xi. \qquad \text{(ワインガルテン)}$$

はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ に対し，別の横断束 $\bar{N}$ とこの $\bar{N}$ を横断束とするアファインはめ込み $f : (M,\bar{\nabla}) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ を考え，$\bar{B}$，$\bar{A}$，$\bar{\nabla}^{\bar{N}}$ をそれぞれこのアファインはめ込み $f : (M,\bar{\nabla}) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ のアファイン基本形式，シェイプテンソル，横断接続とする．このとき次の結果が知られている．

補題 3.1 ([1], [9])

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X &= \nabla_X + (\hat{i}^f)^{-1}\bar{\pi}_f\iota_N B_X,\\
\bar{B}_X &= \pi_{\bar{N}}\iota_N B_X,\\
\bar{A}_X &= A_X\pi_N\iota_{\bar{N}} - \nabla_X(\hat{i}^f)^{-1}\pi_f\iota_{\bar{N}} - (\hat{i}^f)^{-1}\bar{\pi}_f\iota_N B_X(\hat{i}^f)^{-1}\pi_f\iota_{\bar{N}}\\
&\quad - (\hat{i}^f)^{-1}\bar{\pi}_f\iota_N\nabla^N_X\pi_N\iota_{\bar{N}},\\
\bar{\nabla}^{\bar{N}}_X &= \pi_{\bar{N}}\iota_N\nabla^N_X\pi_N\iota_{\bar{N}} + \pi_{\bar{N}}\iota_N B_X(\hat{i}^f)^{-1}\pi_f\iota_{\bar{N}}.
\end{aligned}$$

ここで $\bar{\pi}_f : f^\sharp T\widetilde{M} \to i^f(TM)$，$\pi_{\bar{N}} : f^\sharp T\widetilde{M} \to N$ は射影準同型，$\bar{\iota}_f : i^f(TM) \to f^\sharp T\widetilde{M}$，$\iota_{\bar{N}} : \bar{N} \to f^\sharp T\widetilde{M}$ は包含写像，X は $x \in M$ における任意の接ベクトルとする．

以下，(M,J) を複素多様体，$\nabla \in \mathcal{C}_0(TM,J)$ とする．

定義 3.2 横断束が N のアファインはめ込み $f : (M,\nabla) \to (\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ はそのアファイン基本形式 B が各点 $x \in M$ で任意の $X, Y \in T_xM$ に対し $B_XJY = B_{JX}Y$ を満たすとき $(1,1)$-*geodesic* といわれる．

横断束が N のアファインはめ込みが写像として多重調和であれば，そのアファインはめ込みは $(1,1)$-geodesic である．逆に任意の $(1,1)$-geodesic アファインはめ込みは写像として多重調和である．

ケーラー多様体からリーマン多様体への等長はめ込みが $(1,1)$-geodesic であることとシェイプテンソル A が各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対し

$$A_{JX} = -JA_X \tag{3.2}$$

を満たすことは同値であり，このようなはめ込みは極小であることがわかる．逆は外の多様体がユークリッド空間のときに成立する．つまりケーラー多様体からユークリッド空間への等長はめ込みに対しては $(1,1)$-geodesic であることと，極小であることは同値である．$(1,1)$-geodesic アファインはめ込みのシェイプテンソルに対して (3.2) は一般に成立しない．

空間型への等長はめ込みに対応する概念として二次超曲面へのアファインはめ込みについて考える．このようなはめ込みについては [8] で考えられておりそこでは二次超曲面へのアファインはめ込みの基本定理などが得られている．$(x^1, \ldots, x^{2m+p+1})$ を $\mathbb{R}^{2m+p+1}$ の標準座標とし，D を標準接続とする．$\mathbb{R}^{2m+p+1}$ の二次超曲面 Q を

$$Q := Q(s,\bar{s}) := \{x \in \mathbf{R}^{2m+p+1} | -\textstyle\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^{s+\bar{s}}(x^j)^2 = 1\}$$

で定義する．ここで $0 \leqq s, 0 \leqq \bar{s}, 0 < s+\bar{s} \leqq 2m+p+1$ とする．$\iota : Q \to \mathbb{R}^{2m+p+1}$ を包含写像とする．ベクトル場 ξ を

$$\xi := -\sum_{i=1}^{2m+p+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で定義し，N^Q を各点 $q \in Q$ で

$$N_q^Q := \mathrm{Span}\{(\iota_{\sharp q})^{-1}\xi\}$$

で定義するとはめ込み ι の横断束となる．分解から決まる Q 上の接続を ∇^Q とすると，$\iota : (Q, \nabla^Q) \to (\mathbb{R}^{2m+p+1}, D)$ は横断束が N^Q の中心アファインはめ込みとなる．横断束が N^Q のアファインはめ込み $\iota : (Q, \nabla^Q) \to (\mathbb{R}^{2m+p+1}, D)$ のアファイン基本形式を B^Q とすると各点 $q \in Q$ で任意の $U, V \in T_qQ$ に対して $B_U^Q V := h^Q(U,V)(\iota_{\sharp q})^{-1}\xi$ で決まる h^Q は Q 上の対称双線形関数である．横断束が N のアファインはめ込み $f : (M, \nabla) \to (Q, \nabla^Q)$ のガウス方程式は各点 $x \in M$ で任意の $X, Y, Z \in T_xM$ に対し，

$$R_{X,Y}Z = A_X B_Y Z - A_Y B_X Z + (f^*h^Q)_x(Y,Z)X - (f^*h^Q)_x(X,Z)Y$$

と書かれる．次の補題が成立する．

補題 3.3 横断束が N の $(1,1)$-*geodesic* アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(Q,\nabla^Q)$ に対し，各点 $x\in M$ で任意の $X,Y\in T_xM$ に対し (3.2),

$$(f^*h^Q)_x(JX,JY)=(f^*h^Q)_x(X,Y) \tag{3.3}$$

を仮定する．このとき各点 $x\in M$ で $\mathrm{rank}(f^*h^Q)_x=0$, あるいは 2 である．

証明 $x\in M$ を固定し，$\mathrm{rank}(f^*h^Q)_x=k$ とおく．ガウス方程式と (3.2) よりリッチテンソル Ric は各点 $x\in M$ で任意の $X,Y\in T_xM$ に対し次で与えられる．

$$Ric_{X,Y}=-\mathrm{tr}(A_XB_Y)+(k-1)(f^*h^Q)_x(X,Y). \tag{3.4}$$

また，各点 $x\in M$ で任意の $X,Y\in T_xM$ に対し $R_{X,Y}=-JR_{X,Y}J$ であること，はめ込みが $(1,1)$-geodesic であること，仮定 (3.2), (3.3) より

$$Ric_{X,Y}=-\mathrm{tr}(A_XB_Y)+(f^*h^Q)_x(X,Y) \tag{3.5}$$

が成り立つ．(3.4) と (3.5) を合わせると $(k-2)(f^*h^Q)_x(X,Y)=0$ となり $k-2=0$ あるいは $(f^*h^Q)_x$ が恒等的にゼロになることがわかる．よって結果を得る． □

上の補題をケーラー多様体から空間型への $(1,1)$-geodesic 等長はめ込みに適用すると空間型の断面曲率がゼロでないとき，ケーラー多様体から空間型への $(1,1)$-geodesic 等長はめ込みが存在すればケーラー多様体の次元は実 2 次元となるという [2] の結果を得ることができる．

補題 3.1 より次のことがわかる．

命題 3.4 アファインはめ込みが $(1,1)$-*geodesic* であるという性質は横断束の取り方に依らない．

定義 3.5 横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ と $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し，横断束が N_z のアファインはめ込み $f_z:(M,\nabla)\to(\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ は f_z が写像として f の *associated family* であり，更に $\Psi_z(N)=N_z$ が成立するとき f の *associated family* と呼ばれる．

横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ に associated family $f_z:(M,\nabla)\to(\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, が存在するとき，横断束の間のベクトル束同型 $F_z:N\to N_z$ を $F_z:=\pi_{N_z}\Psi_z\iota_N$ と定義する．ここで $\pi_{N_z}:f_z^\sharp T\widetilde{M}\to N_z$ は射影準同型である．すると f_z のアファイン基本形式 B^z，シェイプテンソル A^z，横断接続 ∇^{N_z} は各点 $x\in M$ と任意の $X\in T_xM$ に対して次を満たすことが associated family の定義からわかる．

$$A^z_XF_z=E^{z^{-1}}A_X,\quad B^z_X=F_zB_XE^z,\quad F_z\nabla^N_X=\nabla^{N_z}_XF_z.$$

ケーラー多様体から擬リーマン多様体への等長はめ込みに対しては，A^z と B^z の式は同値である．ケーラー多様体からユークリッド空間への等長はめ込みに対し [2] で，外の多様体が擬ユークリッド空間のときには [6] で $(1,1)$ テンソル場 E^z の代りに (2.3) で定義された $(1,1)$ テンソル場 E^θ を用いて associated family と呼ばれる等長はめ込みの実1径数族について研究されている．補題 2.3 に類似する結果として次を得た．

補題 3.6 横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\widetilde{M},\widetilde{\nabla})$ に *associated family* が存在すれば，f は $(1,1)$-*geodesic* である．

補題 3.6 の逆についても命題 2.4 に類似する次の結果が得られる．

命題 3.7 複素多様体 (M,J) が単連結のとき，横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ に *associated family* が存在することと f が $(1,1)$-*geodesic* であることとは同値である．

4　2つのアファインはめ込みの積はめ込み

次の章にある結果を述べるために必要な2つのアファインはめ込みの積はめ込みについて述べる．以下，$i,j=1,2$，$i\neq j$ とする．M_i を多様体とし，$(x_1,x_2)\in M_1\times M_2$ に対し，$q_{ix_j}:M_i\to M_1\times M_2$ を

$$q_{ix_j}(x_i):=(x_1,x_2)\qquad x_j\in M_j$$

で定義する．各点 $x_i\in M_i$ に対し $Y\in T_{x_i}M_i$ の $M_1\times M_2$ へのリフト $\widetilde{Y}^i$ を各点 $x_j\in M_j$ に対して

$$\widetilde{Y}^i:=q_{ix_j*x_i}Y\in T_{(x_1,x_2)}M_1\times M_2$$

で定義する．$\nabla^i\in\mathcal{C}_0(TM_i)$ から，積多様体 $M_1\times M_2$ 上には任意の $W_i\in T_{x_i}M_i$, $X_i\in\Gamma(TM_i)$ に対し

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W_1}^1+\widetilde{W_2}^2}\widetilde{X_1}^1+\widetilde{X_2}^2=\widetilde{\nabla^1_{W_1}X_1}^1+\widetilde{\nabla^2_{W_2}X_2}^2$$

で決まる接続 $\widetilde{\nabla}\in\mathcal{C}(T(M_1\times M_2))$ が唯一存在する．∇^i が捩率ゼロなので $\widetilde{\nabla}$ も捩率ゼロである．この $\widetilde{\nabla}$ を ∇^1 と ∇^2 の**積接続**と呼ぶ．$(M_i,\nabla^i)=(\mathbb{R}^{n_i},D^i)$ のとき，D^1 と D^2 との積接続は $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ の標準アファイン接続とアファイン微分同相である．ここで D^i は $\mathbb{R}^{n_i}$ の標準アファイン接続とする．

$(M_1,\nabla^1)=(M_2,\nabla^2)=(M,\nabla)$ の場合を考える．$\Delta:M\ni x\mapsto(x,x)\in M\times M$ をはめ込みとする．N^Δ を各点 $x\in M$ で

$$N^\Delta_x:=\mathrm{Span}\{\widetilde{X}^1-\widetilde{X}^2|X\in T_xM\}$$

で定義すると，$\Delta : (M, \nabla) \to (M \times M, \widetilde{\nabla})$ は横断束が $\Delta^\sharp N^\Delta$ のアファインはめ込みになることがわかる．更に横断束が $\Delta^\sharp N^\Delta$ のアファインはめ込み $\Delta : (M, \nabla) \to (M \times M, \tilde{\nabla})$ のアファイン基本形式，シェイプテンソルは恒等的にゼロになることがわかる．よってこのアファインはめ込み Δ は M から $M \times M$ への自然なはめ込みと考えることができる．

多様体 $\overline{M}_i$，$\overline{\nabla}^i \in \mathcal{C}_0(T\overline{M}_i)$ に対し，$f_i : (M, \nabla) \to (\overline{M}_i, \overline{\nabla}^i)$ を横断束が N_i のアファインはめ込みとし，アファインはめ込み f_i のアファイン基本形式，シェイプテンソル，横断接続をそれぞれ B^i，A^i，∇^{N_i} とする．積はめ込み

$$\tilde{f} := (f_1 \times f_2) \circ \Delta : M \to \overline{M}_1 \times \overline{M}_2$$

について考える．各点 $y_i \in \overline{M}_i$ に対し，$X \in T_{y_i}\overline{M}_i$ の $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ へのリフトを $\overline{X}^i$ で表す．更に各点 $x \in M$ と $U_i \in (f_i^\sharp T\overline{M}_i)_x$ に対し $\overline{U_i}^i \in (\tilde{f}^\sharp T(\overline{M}_1 \times \overline{M}_2))_x$ を

$$\overline{U_i}^i := (\tilde{f}_{\sharp x})^{-1}(\overline{f_{i\sharp x} U_i}^i)$$

で定義する．$\widetilde{N}$ を各点 $x \in M$ で

$$\widetilde{N}_x := \overline{N_{1x}}^1 \oplus \overline{N_{2x}}^2 \oplus (\tilde{f}_{\sharp x})^{-1}(f_1 \times f_2)_{*\Delta(x)} N_x^\Delta \tag{4.1}$$

で定義すると $\widetilde{N}$ ははめ込み $\tilde{f} : M \to \overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ の横断束となる．$\overline{\nabla}^1$ と $\overline{\nabla}^2$ の積接続を $\overline{\nabla}$ とすると $\tilde{f} : (M, \nabla) \to (\overline{M}_1 \times \overline{M}_2, \overline{\nabla})$ は横断束が $\widetilde{N}$ のアファインはめ込みとなることを示すことができる．アファインはめ込みには横断束の取り方に自由度がある．M，$\overline{M}_i$ がリーマン多様体で f_i が等長はめ込みのとき，N_i として f_i の法束をとることで (4.1) で与えられる横断束 $\widetilde{N}$ は，はめ込み $\tilde{f}$ の法束となりこのアファインはめ込みは等長はめ込みの積はめ込みの一般化されたものであると考えることができる．横断束 $\widetilde{N}$ が (4.1) で与えられるアファインはめ込み $\tilde{f} : (M, \nabla) \to (\overline{M}_1 \times \overline{M}_2, \overline{\nabla})$ のアファイン基本形式 $\tilde{B}$，シェイプテンソル $\tilde{A}$，横断接続 $\widetilde{\nabla}^{\tilde{N}}$ は次で特徴付けられる．

命題 4.1 任意の $X \in T_x M$，$Y \in \Gamma(TM)$，$\xi_i \in \Gamma(N_i)$ に対し

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_X Y &= \overline{B_X^1 Y}^1 + \overline{B_X^2 Y}^2, \\
\tilde{A}_X(\overline{\xi_1}^1 + \overline{\xi_2}^2 + \overline{i^{f_1} Y}^1 - \overline{i^{f_2} Y}^2) &= \frac{1}{2}(A_X^1 \xi_1 + A_X^2 \xi_2), \\
\widetilde{\nabla}_X^{\tilde{N}}(\overline{\xi_1}^1 + \overline{\xi_2}^2 + \overline{i^{f_1} Y}^1 - \overline{i^{f_2} Y}^2) &= \overline{\nabla_X^{N_1} \xi_1}^1 + \overline{\nabla_X^{N_2} \xi_2}^2 + \overline{B_X^1 Y}^1 - \overline{B_X^2 Y}^2 \\
&\quad + \overline{i^{f_1} \nabla_X Y}^1 - \frac{1}{2}\overline{i^{f_1}(A_X^1 \xi_1 - A_X^2 \xi_2)}^1 \\
&\quad - \overline{i^{f_2} \nabla_X Y}^2 + \frac{1}{2}\overline{i^{f_2}(A_X^1 \xi_1 - A_X^2 \xi_2)}^2.
\end{aligned}$$

5　複素アファインはめ込み

この章では複素多様体間の複素アファインはめ込みについて導入し，主結果を述べる．以下，(M,J) は複素多様体，$\nabla\in\mathcal{C}_0(TM,J)$ とする．2つの複素多様体 (M,J)，$(\widetilde{M},\tilde{J})$ の間の写像 $f:M\to\widetilde{M}$ が正則であるとは $f_*J=\tilde{J}f_*$ が成立することと同値であるが，これは更に $i^fJ=(f^\sharp\tilde{J})i^f$ と同値である．

命題 5.1 複素多様体 (M,J) と写像 $f_i:M\to\mathbb{R}^{2m+p}$，$i=1,2$ に対しベクトル束同型

$$\Psi:f_1^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}\to f_2^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$$

で各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$ に対し次を満たすものの存在を仮定する．

$$(f_2^\sharp D)_X\Psi \;=\; \Psi(f_1^\sharp D)_X, \tag{5.1}$$
$$-\Psi i^{f_1}J \;=\; i^{f_2} \tag{5.2}$$

このとき各点 $x\in M$ で任意の $U_i\in(f_i^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p})_x$ に対し

$$\hat{J}(\overline{U_1}^1+\overline{U_2}^2) \;:=\; \overline{-\Psi^{-1}U_2}^1+\overline{\Psi U_1}^2$$

で定義される $\hat{J}:\tilde{f}^\sharp T(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p})\to\tilde{f}^\sharp T(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p})$ は $\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p}$ 上の標準アファイン接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ に拡張できて，写像 $\tilde{f}:=(f_1\times f_2)\circ\Delta$ が J と $\tilde{J}$ に関して正則写像になる．

証明　直接計算により $(\hat{J})^2=-id_{\tilde{f}^\sharp T(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p})}$ がわかる．(5.1) より各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$，$U_i\in\Gamma(f_i^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p})$ に対して

$$\begin{aligned}
(\tilde{f}^\sharp D)_X\hat{J}(\overline{U_1}^1+\overline{U_2}^2) &= (\tilde{f}^\sharp D)_X(\overline{-\Psi^{-1}U_2}^1+\overline{\Psi U_1}^2)\\
&= \overline{(f_1^\sharp D)_X(-\Psi^{-1}U_2)}^1+\overline{(f_2^\sharp D)_X(\Psi U_1)}^2\\
&= \overline{-\Psi^{-1}(f_2^\sharp D)_XU_2}^1+\overline{\Psi(f_1^\sharp D)_XU_1}^2\\
&= \hat{J}(\overline{(f_1^\sharp D)_XU_1}^1+\overline{(f_2^\sharp D)_XU_2}^2)\\
&= \hat{J}(\tilde{f}^\sharp D)_X(\overline{U_1}^1+\overline{U_2}^2)
\end{aligned}$$

であることがわかるので各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$ に対して

$$(\tilde{f}^\sharp D)_X\hat{J} \;=\; \hat{J}(\tilde{f}^\sharp D)_X$$

が成立し $T(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p})$ の複素構造 $\tilde{J}$ で $\tilde{f}^\sharp\tilde{J}=\hat{J}$ を満たすものが存在することがわかる．各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$ に対して

$$i^{\tilde{f}}X \;=\; \overline{i^{f_1}X}^1+\overline{i^{f_2}X}^2 \tag{5.3}$$

が成立する．(5.2)，(5.3) より各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対して

$$\begin{aligned} i^{\tilde{f}}JX &= \overline{i^{f_1}JX}^1 + \overline{i^{f_2}JX}^2 \\ &= \overline{-\Psi^{-1}i^{f_2}X}^1 + \overline{\Psi i^{f_1}X}^2 \\ &= (\tilde{f^\sharp}\tilde{J})(\overline{i^{f_1}X}^1 + \overline{i^{f_2}X}^2) \\ &= (\tilde{f^\sharp}\tilde{J})i^{\tilde{f}}X \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$(\tilde{f^\sharp}\tilde{J})i^{\tilde{f}} = i^{\tilde{f}}J$$

が成り立ち $\tilde{f}$ が J と $\tilde{J}$ に関して正則写像になることがわかる． □

命題 2.4, 5.1 より

系 5.2 複素多様体 (M, J) と $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$ に対し，M が単連結で写像 $f : M \to \mathbb{R}^{2m+p}$ が多重調和であると仮定する．このとき，$\mathbb{R}^{2m+p} \times \mathbb{R}^{2m+p}$ の標準アファイン接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在して $(f \times (-f_{\sqrt{-1}})) \circ \Delta$ が J と $\tilde{J}$ に関して正則写像になる．

証明 M が単連結で f が多重調和なので f には associated family f_z, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が命題 2.4 により存在する．associated family の定義により，ベクトル束同型 $-\Psi_{\sqrt{-1}} : f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p} \to f^\sharp_{\sqrt{-1}} T\mathbb{R}^{2m+p}$ は命題 5.1 の仮定 (5.1)，(5.2) を満たすことがわかる．よって命題 5.1 より主張が満たされる． □

複素多様体の各点における単連結近傍を考え，系 5.2 を適用させることにより次が得られる．

系 5.3 複素多様体 (M, J) と $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$ に対し，任意の多重調和写像 $f : M \to \mathbb{R}^{2m+p}$ は実解析的である．

次にこれらの結果をアファインはめ込みに適用する．はじめに複素アファインはめ込みの定義を述べる．

定義 5.4 (M, J)，$(\widetilde{M}, \tilde{J})$ を複素多様体，$\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, J)$，$\tilde{\nabla} \in \mathcal{C}_0(T\widetilde{M}, \tilde{J})$ とする．横断束が N のアファインはめ込み $f : (M, \nabla) \to (\widetilde{M}, \tilde{\nabla})$ は f が写像として正則で横断束 N が $f^\sharp\tilde{J}$ 不変 $(f^\sharp\tilde{J}(N) = N)$ であるとき**複素アファインはめ込み**と呼ばれる．ここで $f^\sharp\tilde{J}$ は $\tilde{J}$ の f による引き戻しである．このとき N に誘導される複素構造を $J^N := \pi_N f^\sharp \tilde{J} \iota_N$ と書く．

複素アファインはめ込みについては多くの研究がある．例えば [3], [4], [7], [11], [12], [13] を参照のこと．

$\mathbb{R}^{2(m+p)}$ の標準複素構造 J_0 から $T\mathbb{R}^{2(m+p)}$ に自然に決まる複素構造を $\tilde{J}$ とする．横断束が N の複素アファインはめ込み $f : (M, \nabla) \to (\mathbb{R}^{2(m+p)}, D)$ に associated family が存在するとき，それらの合同性についての次の結果を得た．

命題 5.5 横断束が N の複素アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2(m+p)},D)$ に *associated family* が存在すると仮定する．このとき，任意の $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して，f の *associated family* である横断束が N_{z_i} のアファインはめ込み $f_{z_i}:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2(m+p)},D)$, $i=1,2$, は $\mathbb{R}^{2(m+p)}$ のアファイン変換に関してアファイン合同になる．

証明　横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2(m+p)},D)$ と $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対しその associated family である横断束が N_z のアファインはめ込み $f_z:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2(m+p)},D)$ がアファイン合同であることを示せば十分である．J^N を横断束 N に $f^\sharp\tilde{J}$ から誘導される複素構造とし $\tilde{E}^z$ を各 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$\tilde{E}^z:=\mathrm{Re}(z)id_N+\mathrm{Im}(z)J^N$$

で定義する．associated family の定義より，ベクトル束同型 $F_z:N\to N_z$ で各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$ に対し

$$\begin{aligned}B^z_X&=F_zB_xE^z=F_z\tilde{E}^zB_X,\\A^z_XF_z\tilde{E}^z&=E^{z^{-1}}A_X\tilde{E}^z=A_X,\\F_z\tilde{E}^z\nabla^N_X&=\nabla^{N_z}_XF_z\tilde{E}^z\end{aligned}$$

を満たすものが存在する．よって合同定理より f と f_z とは $\mathbb{R}^{2(m+p)}$ のアファイン変換に関して合同である．□

命題 5.5 で更にベクトル束同型 $F_z:N\to N_z$ が

$$F_zJ^N=J^{N_z}F_z$$

を満たすなら任意の $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し f_{z_1} と f_{z_2} とは $(\mathbb{R}^{2(m+p)},\tilde{J})$ の複素アファイン変換に関してアファイン合同になる．ここで $J^{N_z}:=\pi_{N_z}(f_z^\sharp\tilde{J})\iota_{N_z}$ である．

次のような場合には命題 5.5 の逆を示すことができた．主張を述べるために次の定義を述べる．

定義 5.6 横断束が N のアファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{n+p},D)$ に対し，$\mathbb{R}^{n+p}$ のアファイン部分空間 $\mathbb{R}^{n+q}$ $(q<p)$ で $f(M)\subset\mathbb{R}^{n+q}$ となるものが存在しないとき，はめ込みは *full* であるという．

命題 5.7 横断束が N の $(1,1)$-*geodesic* アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ が *full* で，*associated family* が存在し，$\mathbb{R}$ を法として合同でない任意の $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して，f の *associated family* である横断束がそれぞれ N_{z_1}, N_{z_2} のアファインはめ込み f_{z_1} と f_{z_2} とは $\mathbb{R}^{2m+p}$ のアファイン変換に関してアファイン合同であると仮定する．このとき，$\mathbb{R}^{2m+p}$ 上に D に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在してアファインはめ込み f が J と $\tilde{J}$ に関して複素アファインはめ込みとなる．

証明　仮定を満たす z_1, z_2 に対して f_{z_1} と f_{z_2} とがアファイン合同であるとき，f と f_z, $z = \frac{z_2}{z_1}$ もアファイン合同で $\mathrm{Im} z \neq 0$ であるので，以下，一般性を失うことなく f と f_z について考える．f は f_z とアファイン合同なので，ベクトル束同型 $F: N \to N_z$ で各点 $x \in M$ と任意の $X \in T_xM$ に対して次を満たすものが存在する．

$$FB_X = B_X^z, \qquad A_X = A_X^z F, \qquad F\nabla_X^N = \nabla_X^{N_z} F.$$

また f_z は f の associated family なのでベクトル束同型 $F_z: N \to N_z$ で各点 $x \in M$ と任意の $X \in T_xM$ に対して次を満たすものが存在する．

$$F_z B_X E^z = B_X^z, \qquad E^{z^{-1}} A_X = A^z F_z, \qquad F_z \nabla_X^N = \nabla_X^{N_z}.$$

$z = \sqrt{-1}$ とおくと $F_{\sqrt{-1}} B_X J = FB_X$, つまり各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対し次が成り立つことがわかる．

$$B_X J = (F_{\sqrt{-1}})^{-1} F B_X.$$

$T := (F_{\sqrt{-1}})^{-1} F$ と置く．f が $(1,1)$-geodesic なので各点 $x \in M$ で任意の $X, Y \in T_xM$ に対して次が成り立つ．

$$-B_X Y = B_{JX} JY = T^2 B_X Y \tag{5.4}$$

(5.4) より各点 $x \in M$ で

$$\mathrm{Ker}(T^2 + id_N)_x \supset N_1(x)$$

であることがわかる．ここで $N_1(x)$ は $x \in M$ での f の first normal space つまり

$$N_1(x) := \mathrm{Span}\{B_X Y \mid X, Y \in T_xM\}$$

である．T の定義より各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対し $\nabla_X^N T = T\nabla_X^N$ と任意の $\eta \in \Gamma(\mathrm{Ker}(T^2 + id_N))$ に対し

$$(T^2 + id_N)\nabla_X^N \eta = \nabla_X^N (T^2 + id_N)\eta = 0$$

が成立し，$(\nabla_X^N \eta)_x \in \mathrm{Ker}(T^2 + id_N)_x$ であることがわかる．すると reduction theorem より f の余次元は $\dim \mathrm{Ker}(T^2 + id_N)$ まで reduction できる．f は full なので $\dim \mathrm{Ker}(T^2 + id_N) = p$ であり N 上で $T^2 = -id_N$ であることがわかる．$\hat{J}: f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p} \to f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$ を任意の $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(N)$ に対し次で定義する．

$$\hat{J}(i^f X + \xi) := i^f JX + T\xi$$

すると $\hat{J}^2 = -id_{f^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}}$ であり，各点 $x \in M$ で任意の $X \in T_xM$ に対して $(f^\sharp D)_X \hat{J} = \hat{J}(f^\sharp D)_X$ が成立することが直接計算により確かめられる．よって $\mathbb{R}^{2m+p}$ の D に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ で $f^\sharp \tilde{J} = \hat{J}$ を満たすものが存在し，横断束が N のアファインはめ込み $f: (M, \nabla) \to (\mathbb{R}^{2m+p}, D)$ が J と $\tilde{J}$ に関して複素アファインはめ込みとなることが示される．　□

横断束が N の $(1,1)$-geodesic アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ に associated family が存在するとき，$\mathbb{R}$ を法として合同であるような任意の $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して，アファインはめ込み f の associated family である横断束がそれぞれ N_{z_1}, N_{z_2} のアファインはめ込み f_{z_1} と f_{z_2} とは $\mathbb{R}^{2m+p}$ のアファイン変換に関してアファイン合同になることを示すことができる．

ケーラー多様体間の等長はめ込みが正則写像ならそのはめ込みはレビ・チビタ接続に関して法束を横断束とする複素アファインはめ込みである．外の積多様体に複素構造を構成することで2つのアファインはめ込みの積として複素アファインはめ込みを実現することを考える．

定理 5.8 横断束が N_i のアファインはめ込み $f_i:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ に対し，各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$ に対して

$$F\nabla^{N_1}_X=\nabla^{N_2}_X F,\quad JA^1_X=A^2_XF,\quad -B^2_X=FB^1_XJ$$

を満たすベクトル束同型 $F:N_1\to N_2$ が存在すれば，$\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p}$ の標準アファイン接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在して横断束 $\widetilde{N}$ が (4.1) で与えられるアファインはめ込み $\tilde{f}:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p},D)$ が J と $\tilde{J}$ に関して複素アファインはめ込みになる．

証明 $\Psi: f_1^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}\to f_2^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$ を各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$, $\xi\in N_{1_x}$ に対して

$$\Psi_x(i^{f_1}_xX+\xi):=i^{f_2}_xJX+F_x\xi$$

で定義すると Ψ は $f_1^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$ から $f_2^\sharp T\mathbb{R}^{2m+p}$ へのベクトル束同型になる．仮定より各点 $x\in M$ で任意の $X\in T_xM$, $Y\in\Gamma(TM)$，$\xi\in\Gamma(N_1)$ に対して

$$\begin{aligned}(f_2^\sharp D)_X\Psi(i^{f_1}Y+\xi)&=(f_2^\sharp D)_X(i^{f_2}JY+F\xi)\\&=i^{f_2}\nabla_XJY+B^2_XJY-i^{f_2}A^2_XF\xi+\nabla^{N_2}_XF\xi\\&=\Psi(f_1^\sharp D)_X(i^{f_1}Y+\xi)\end{aligned}$$

が成立する．一方，Ψ の定義より $-\Psi i^{f_1}J=i^{f_2}$ が成立する．よって命題 5.1 より $\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p}$ の標準アファイン接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在して $\tilde{f}:=(f_1\times f_2)\circ\Delta$ が J と $\tilde{J}$ に関して正則写像になる．また，直接計算により各点 $x\in M$ で任意の $Y\in T_xM$，$\xi\in N_{1x}$，$\eta\in N_{2x}$ に対して次が成立することがわかる．

$$\begin{aligned}(\tilde{f}^\sharp\tilde{J})(\overline{\xi}^1+\overline{\eta}^2+\overline{i^{f_1}Y}^1-\overline{i^{f_2}Y}^2)&=\overline{-\Psi^{-1}\eta}^1+\overline{\Psi\xi}^2+\overline{-\Psi^{-1}i^{f_2}Y}^1-\overline{\Psi i^{f_1}Y}^2\\&=\overline{-F^{-1}\eta}^1+\overline{F\xi}^2+\overline{i^{f_1}JY}^1-\overline{i^{f_2}JY}^2.\end{aligned}$$

よって $\widetilde{N}$ は $\tilde{f}^\sharp\tilde{J}$ 不変であり $\tilde{f}:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p},D)$ は J と $\tilde{J}$ に関して横断束が $\widetilde{N}$ の複素アファインはめ込みである． □

$(1,1)$-geodesic アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ に対し，以下の結果を得た．

系 5.9 M が単連結のとき，横断束が N の $(1,1)$-*geodesic* アファインはめ込み $f:(M,\nabla)\to(\mathbb{R}^{2m+p},D)$ に対し，$\mathbb{R}^{2m+p}\times\mathbb{R}^{2m+p}$ の標準アファイン接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在して横断束 $\widetilde{N}$ が (4.1) で与えられるアファインはめ込み $(f\times(-f_{\sqrt{-1}}))\circ\Delta$ が J と $\tilde{J}$ に関して複素アファインはめ込みになる．

M がケーラー多様体のとき，指数 n $(0\leqq n\leqq p)$ の擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2m+p}_n$ への等長はめ込みに対して適用すると，[2], [6] で既に知られている次の結果が得られる．

系 5.10 単連結ケーラー多様体 M と $(1,1)$-*geodesic* 等長はめ込み $f:M\to\mathbb{R}^{2m+p}_n$ に対し，$\mathbb{R}^{2m+p}_n\times\mathbb{R}^{2m+p}_n$ のレビ・チビタ接続に関して平行な複素構造 $\tilde{J}$ が存在して $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f\times(-f_{\sqrt{-1}}))\circ\Delta$ が J と $\tilde{J}$ に関して正則等長はめ込みになる．

最後に $(1,1)$-geodesic アファインはめ込みの例をあげ，associated family と複素アファインはめ込みを構成する．

$(\mathbb{R}^2,J)$ を $\mathbb{R}^2$ の標準複素構造 J_0 から誘導される複素構造 J を持つ 2 次元アファイン空間とする．(x_1,x_2) を $\mathbb{R}^2$ の座標で $J\partial_1=\partial_2$，$J\partial_2=-\partial_1$ を満たすものとする．ここで $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2$ と略記を用いている．$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(x_1,x_2):=(x_1,x_2,x_1x_2+\frac{x_1^2-x_2^2}{2})$$

で定義し，$\xi:=(0,0,1)$ に対して横断束 N を各点 $x\in\mathbb{R}^2$ で

$$N_x:=\mathrm{Span}\{(f_{\sharp x})^{-1}\xi\}$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ 上に標準アファイン接続 D を考え，分解から $\mathbb{R}^2$ に誘導される接続を ∇ とすると，$f:(\mathbb{R}^2,\nabla)\to(\mathbb{R}^3,D)$ は横断束が N のアファインはめ込みとなる．f はグラフはめ込みなのでアファイン基本形式は各点 $x\in\mathbb{R}^2$ で

$$(B_{\partial_\alpha}\partial_\beta)_x=\left(\frac{\partial h}{\partial_\alpha\partial_\beta}\right)_x(f_{\sharp x})^{-1}\xi$$

を満たす．ここで $h:=x_1x_2+\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}$, $\alpha,\beta=1,2$. 直接計算より各点 $x\in\mathbb{R}^2$ で

$$\begin{aligned}
(B_{\partial_1}\partial_1)_x&=(f_{\sharp x})^{-1}\xi,\\
(B_{\partial_1}\partial_2)_x&=(B_{\partial_2}\partial_1)_x=(f_{\sharp x})^{-1}\xi,\\
(B_{\partial_2}\partial_2)_x&=(B_{J\partial_1}J\partial_1)_x=-(B_{\partial_1}\partial_1)_x=-(f_{\sharp x})^{-1}\xi
\end{aligned}$$

がわかり f が $(1,1)$-geodesic アファインはめ込みであることがわかる．

$\mathbb{R}^2$ は単連結なので，f には associated family を構成することができる．実際，$z = a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$a, b \in \mathbb{R}$ に対し写像 $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f_z(x_1, x_2) = (ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2, (a-b)x_1x_2 + (a+b)\frac{x_1^2 - x_2^2}{2})$$

で，$\Psi_z : f^\sharp T\mathbb{R}^3 \to f_z^\sharp T\mathbb{R}^3$ を各点 $x \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\Psi_{zx} := (f_{z\sharp x})^{-1}(f_{\sharp x})$$

により定義すると f_z は写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の associated family であることがわかる．
更に N_z を各点 $x \in \mathbb{R}^2$ で

$$N_{zx} := \mathrm{Span}\{(f_{z\sharp x})^{-1}\xi\}$$

により定義すると $f_z : (\mathbb{R}^2, \nabla) \to (\mathbb{R}^3, D)$ は横断束が N_z のアファインはめ込みとなり，さらに横断束が N のアファインはめ込み $f : (\mathbb{R}^2, \nabla) \to (\mathbb{R}^3, D)$ の associated family となることを示すことができる．
この場合 $\tilde{f} := (f \times (-f_{\sqrt{-1}})) \circ \Delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ は

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}, x_2, -x_1, x_1x_2 - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2})$$

で定義され $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2, \nabla) \to (\mathbb{R}^6, D)$ は各点 $x \in \mathbb{R}^2$ で

$$\widetilde{N}_x := \overline{N_x}^1 \oplus \overline{N_{\sqrt{-1}x}}^2 \oplus (\tilde{f}_{\sharp x})^{-1}(f \times (-f_{\sqrt{-1}}))_{*\Delta(x)} N_x^\Delta$$

で与えられる $\widetilde{N}$ が横断束のアファインはめ込みとなる．$\mathbb{R}^6$ の標準基 $e_1, \ldots, e_6$ に対して $\mathbb{R}^6$ の複素構造 $\hat{J}_0$ を以下で定義する．

$$\hat{J}_0 e_1 = e_2, \quad \hat{J}_0 e_2 = -e_1, \quad \hat{J}_0 e_3 = e_6, \quad \hat{J}_0 e_4 = e_5, \quad \hat{J}_0 e_5 = -e_4, \quad \hat{J}_0 e_6 = -e_3.$$

$\tilde{J}$ を $\hat{J}_0$ から $T\mathbb{R}^6$ に誘導される複素構造とする．$\tilde{J}$ の定義から $\widetilde{N}$ は $\tilde{f}^\sharp \tilde{J}$ 不変であり $\tilde{f}$ は J と $\tilde{J}$ に関して複素アファインはめ込みとなることがわかる．
$z := x_1 + \sqrt{-1}x_2$ と置き，

$$e_1 + \sqrt{-1}e_2, \quad e_3 + \sqrt{-1}e_6, \quad e_4 + \sqrt{-1}e_5$$

を $\mathbb{C}^3$ の複素基底とする．このとき $\tilde{f}$ は次のように書かれる．

$$\tilde{f}(z) = (z, -\sqrt{-1}z, \frac{(1 - \sqrt{-1})z^2}{2}).$$

これは明らかに正則写像であり，またこの写像の実部が f，虚部が $-f_{\sqrt{-1}}$ となっている．

参考文献

[1] Abe, D.: *On affine immersions with parallel relative nullity.* Master thesis (1999) SUT.

[2] Dajczer, M., Gromoll, D.: *Real Kaehler submanifolds and uniqueness of the Gauss map,* J. Differential Geom., **22**, (1985) 13-28.

[3] Dillen, F.: *The affine differential geometry of complex hypersurfaces,* Med. Konink. Acad. Wetensch. Belgie., **52**, (1990) 89-112.

[4] Dillen, F., Vrancken, L.: *Complex Hypersurfaces of* $\mathbb{C}^{n+1}$*, part1,* Bull. Soc. Math. Belg. Sér B., **40**, (1988) 245-271.

[5] Eschenburg, J-H., Tribuzy, R.: *Associated families of pluriharmonic maps and isotropy,* Manuscripta Math., **95** no.3, (1998) 295–310.

[6] Furuhata, H.: Isometric pluriharmonic immersions of Kähler manifolds into semi-Euclidean spaces, Tohoku Mathematical Publications, (1995) **1**.

[7] Furuhata, H., Matsuzoe H.: *Holomorphic centroaffine immersions and the Lelieuvre correspondence,* Results Math., **33**, (1998) 294-305.

[8] Hasegawa, K.: *The fundamental theorems for affine immersions into hyperquadrics and its applications,* Monatsh. Math., **131**, (2000) 37-48.

[9] Koike, N., Takekuma K.: *Equiaffine immersions of general codimension and its transversal volume element map,* Results Math., **39**, (2001) 274-291.

[10] Ohnita, Y., Udagawa, S.: *Complex-analyticity of pluriharmonic maps and their constructions,* Lecture Notes in Math **1468** (1991) 371-407, Springer, Berlin.

[11] Opozda, B.: *Fundamental theorems for complex affine hypersurfaces,* Kobe J. Math., **10**, (1993) 133-146.

[12] Opozda, B.: *Equivalence theorems for complex affine hypersurfaces,* Results Math., **27**, (1995) 316-327.

[13] Opozda, B.: *On Some Properties of the Curvature and Ricci Teosor in Complex Affine Geometry,* Geom Dedicata, **55**, (1995) 141-163.

[14] Kurosu, S.: *Pluriharmonic maps in affine differential geometry and* $(1,1)$*-geodesic affine immersions,* submitted for publication.